

DEVOIR SURVEILLÉ 1 - RÉVISIONS PREMIÈRE ANNÉE

Durée : 2h

La présentation, la lisibilité, la qualité de la rédaction et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les consignes suivantes sont à respecter sous peine d'absence de correction ou de notation, dans ce sujet ainsi que dans tous les suivants :

- Les résultats doivent être encadrés,
 - Les pages doivent être numérotées,
 - Tout résultat ou toute affirmation doit être dûment justifié(e).
 - Chaque nouvel exercice ou nouveau problème commencera sur une nouvelle page.
- Les exercices/problèmes peuvent être traités dans l'ordre souhaité, mais les questions d'un même exercice doivent être traitées dans l'ordre.

Les téléphones portables sont interdits et doivent être rangés dans les sacs. **Calculatrices interdites dans ce sujet.**

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Chaque étudiant portera en tête de son devoir le tableau suivant :

Réd.	Rais.	Mod.	Calc.	Rech.	Représ.	Comm.	Cours

Lors de la correction, l'étudiant recevra dans chaque case (respectivement) **Rédiger** / **Raisonner** / **Modéliser** / **Calculer** / **Rechercher** / **Représenter** / **Communiquer** / **Cours** une note allant de A (très bien) à F (non maîtrisé). Ceci lui permettra de voir si des progrès ont été faits au courant de l'année.

EXERCICE 1 : Questions de cours

1. Soit P un polynôme à coefficients réels et a un réel.
 - a) Que signifie " a est racine de P " ? Donner un exemple.
 - b) Qu'est-ce qu'une racine multiple ? Donner une condition simple à vérifier pour que a soit racine multiple de P .
2. Déterminer une écriture trigonométrique du nombre complexe $z = 1 - i$.
3. Donner une dérivée de $\tan x$.
4. Quelle sont les solutions possibles de l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad \text{où } \Delta = b^2 - 4ac = 0$$

PROBLÈME 1 : MAJORATION DU COSINUS HYPERBOLIQUE

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que φ est une fonction paire.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n n! \leq (2n)!$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{tx} dt$$

(On pourra utiliser une intégration par partie en cas de besoin, avec les fonctions u, v telles que $u'(t) = (1-t)^n$ et $v(t) = e^{tx}$ pour tout $t \in [0, 1]$.)

Dans la suite, on notera

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \quad \text{et} \quad I_n(x) = \int_0^1 (1-t)^n e^{tx} dt,$$

de sorte que :

$$e^x = T_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Dans cette question, on pose x un réel positif ou nul.
 - a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq I_n(x) \leq e^x$$

- b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x)$ existe et la déterminer. On admettra ensuite cette limite encore valable pour tout $x < 0$.
- c) Montrer que la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = e^x$$

5. Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$.
 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$T_{2n}(x) + T_{2n}(-x) \leq 2 \cdot T_n\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

- b) Dédurre des questions précédentes que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad \varphi(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}$$

- c) Montrer que cette inégalité est vraie également pour tout x négatif.
 6. Application : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, e^{tX} admet une espérance qui vérifie :

$$E(e^{tX}) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

PROBLÈME 2 :

On considère une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules noires indiscernables au toucher.

On pose $N = N_1 + N_2$.

On répète l'expérience suivante : on tire au hasard une boule dans l'urne et l'on replace dedans deux boules de la couleur obtenue.

À l'issue de la première expérience, l'urne contient donc $N + 1$ boules et l'on note X_1 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. À l'issue de la deuxième expérience, l'urne contient donc $N + 2$ boules et l'on note X_2 la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne. Plus généralement, pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches présentes dans l'urne à l'issue de la k -ième expérience.

Pour tout k non nul, on note B_k l'événement "la boule tirée lors de la k -ième expérience est blanche".

Partie I Étude d'un cas particulier

On suppose ici que $N_1 = 1$ et $N_2 = 1$.

- Proposer une fonction Python d'argument n permettant de simuler la variable X_n . (Ne pas oublier de commenter le programme !)
- Que vaut $P(B_1)$?
 - En déduire la loi de X_1 .
- Déterminer $P(B_1 \cap B_2)$ ainsi que $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$.
 - En déduire la loi de X_2 .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Quelles sont les différentes valeurs possibles de X_n ? On notera $X_n(\Omega)$ cet ensemble.

- Soit $k \in X_{n+1}(\Omega)$. Déterminer $P_{X_n=i}(X_{n+1} = k)$ pour tout $i \in X_n(\Omega)$.
 - En déduire que X_n suit une loi uniforme sur $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.
 On pourra faire une récurrence et utiliser le système complet $((X_n = i))_{1 \leq i \leq n+1}$ pour déterminer la loi de X_{n+1} .
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité de B_n .
 (On pourra utiliser la question précédente et la formule des probabilités totales avec le même système complet que dans la question précédente.)
6.
 - Déterminer $\mathbb{E}[X_n]$
 - Rappeler la formule de $\sum_{k=1}^n k^2$.
 - En déduire la variance de X_n .

Partie II Retour au cas général

- Déterminer la probabilité des événements B_1 et B_2 . Conjecturer $P(B_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Quelles sont les valeurs possibles de X_n ? On notera $X_n(\Omega)$ cet ensemble.
 - En déduire que

$$P(B_{n+1}) = \frac{1}{N+n} \sum_{k=N_1}^{N_1+n} k P(X_n = k)$$

- c) Soit $n \geq 2$ et $k \in \llbracket N_1, N_1 + n \rrbracket$. Montrer que

$$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k) + \frac{1}{N+n-1} \left((k-1)P(X_{n-1} = k-1) - kP(X_{n-1} = k) \right)$$

et on étudiera plus précisément les cas $k = N_1$ et $k = N_1 + n$.

- Soit encore $n \geq 2$. En déduire que $P(B_{n+1}) = P(B_n)$.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dédurre des questions précédentes la probabilité de B_n et l'espérance de X_n .

Exercice 1

1. 1.a) a est racine de P si et seulement si $P(a) = 0$. Par exemple, 1 est une racine de $P = X - 1$.
- 1.b) Une racine multiple est une racine de P telle que P est divisible par $(X - a)^n$, où $n \geq 2$. Une condition simple à vérifier est que

$$P(a) = P'(a) = 0$$

3. Une dérivée de $\tan x$ est $1 + \tan^2(x)$, ou alors $\frac{1}{\cos^2(x)}$.
4. D'après le cours, on sait que les solutions sont sous la forme

$$x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{rx}, \quad \text{où } r = \frac{-b}{2a}$$

Problème 1 :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\varphi(-x) = \frac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \frac{e^{-x} + e^x}{2} = \varphi(x)$$

Ainsi, φ est bien paire par définition de la parité.

2. ■ MÉTHODE 1 : ON PROCÈDE PAR RÉCURRENCE.

Soit donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}_n$ suivante :

$$\mathcal{H}_n : 2^n n! \leq (2n)!$$

- Initialisation : cas $n = 0$

On a

$$2^n n! = 2^0 0! = 1 = (2 \times 0)!$$

L'égalité entraîne de fait que

$$2^0 0! \leq (2 \times 0)!$$

est $\mathcal{H}_0$ est vraie.

- Hérédité :

On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vrai. pour $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vrai également. On a

$$2^{n+1}(n+1)! = 2^n \times 2(n+1)n! = 2(n+1) \cdot \underbrace{2^n n!}_{HR} \leq 2(n+1) \cdot (2n)! = (2n+2)(2n)! \quad (1)$$

On souhaite majorer par $(2(n+1))! = (2n+2)!$. Or,

$$(2n+2)! = (2n+2)(2n+1)(2n)! \quad (2)$$

et

$$2n+1 \geq 1$$

d'où, en injectant dans la ligne (2), on obtient

$$(2(n+1))! \geq (2n+2)(2n)!$$

et en injectant ensuite dans la ligne (1), on en déduit :

$$2^{n+1}(n+1)! \leq (2(n+1))!$$

- Conclusion :

L'initialisation ainsi que l'hérédité est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ et ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n n! \leq (2n)!$$

■ MÉTHODE 2 : CALCUL DIRECT

On distingue néanmoins les cas $n = 0$ et les autres.

★ Pour $n = 0$, on observe, comme pour la récurrence, que

$$2^n n! = 2^0 0! = 1 = (2 \times 0)!$$

L'égalité entraîne là aussi que

$$2^0 0! \leq (2 \times 0)!$$

★ Pour $n > 0$, on écrit

$$\begin{aligned} (2n)! &= 2n \times (2n-1) \times (2n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \\ &= \underbrace{(2n-1)(2n-3) \dots 1}_{\text{termes impairs}} \times \underbrace{2n(2n-2) \dots 2}_{\text{termes pairs}} \\ &= \underbrace{(2n-1)(2n-3) \dots 1}_{\geq 1} \times \underbrace{2n(2(n-1)) \dots 2 \times 1}_{=2^n n! \text{ car on a } 2 \times \dots \times 2 \text{ ''n'' fois}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2^n n! \leq (2n)!}$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. On procède là encore par récurrence. On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'hypothèse

$$\mathcal{H}_n : \quad e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{tx} dt$$

- Initialisation : cas $n = 0$

On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 \frac{x^k}{k!} + \frac{x^1}{0!} \int_0^1 (1-t)^0 e^{tx} dt &= \frac{x^0}{0!} + x \int_0^1 e^{tx} dt \\ &= 1 + \int_0^1 x e^{tx} dt \\ &= 1 + [e^{tx}]_0^1 = 1 + e^x - e^0 = e^x \end{aligned}$$

- Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{H}_n$ vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ vraie. On a

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{tx} dt \quad (3)$$

On pose comme suggéré dans l'énoncé les deux fonctions $\mathcal{C}^1([0, 1])$ u, v telles que, pour tout $t \in [0, 1]$:

$$\begin{cases} u'(t) = (1-t)^n & u(t) = -\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1} \\ v(t) = e^{tx} & v'(t) = x e^{tx} \end{cases}$$

Ainsi, par IPP, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n e^{tx} dt &= \frac{x^{n+1}}{n!} \left(\left[-\frac{1}{n+1}(1-t)^{n+1} e^{tx} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1} (1-t)^{n+1} x e^{tx} dt \right) \\ &= \frac{x^{n+1}}{n!} \left(-0 + \frac{1}{n+1} + \int_0^1 \frac{1}{n+1} (1-t)^{n+1} x e^{tx} dt \right) \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{tx} dt \end{aligned}$$

et donc, en réinjectant dans la formule de récurrence :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{tx} dt$$

ainsi, en rassemblant les termes dans la somme Σ :

$$e^x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} e^{tx} dt$$

ce qui correspond à ce qui est attendu.

- Conclusion

L'initialisation et l'hérédité étant vérifiées, la formule est bien vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. 4.a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a

$$0 \leq 1-t \leq 1.$$

Ainsi, par croissance de la fonction "puissance n " sur $\mathbb{R}^+$, on obtient :

$$0 \leq (1-t)^n \leq 1^n = 1$$

De plus, par croissance de la fonction exponentielle, comme $0 \leq x$:

$$\underbrace{e^{0 \times x}}_{=1} \leq e^{tx} \leq \underbrace{e^{1 \times x}}_{=e^x}$$

D'où, par positivité des éléments :

$$0 \leq (1-t)^n e^{tx} \leq 1 \times e^x$$

En réinjectant dans l'intégrale à bornes croissantes, on a alors

$$\underbrace{\int_0^1 0 dt}_{=0} \leq I_n(x) \leq \int_0^1 \underbrace{e^x}_{\text{constant} = e^x} dt$$

et donc

$$\boxed{0 \leq I_n(x) \leq e^x}$$

- 4.b) Par positivité de $\frac{x^{n+1}}{n!}$ et d'après le résultat de la question précédente :

$$0 \leq \underbrace{\frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x)}_{\text{car } x \geq 0} \leq \frac{x^{n+1}}{n!} e^x = x \frac{x^n}{n!} e^x$$

Or, par croissances comparées, on sait que x^n est négligeable devant $n!$. Sachant que $x e^x$ est constant par rapport à n , on en déduit que :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x) = 0}$$

4.c) Par définition, on a

$$T_n(x) - e^x = \frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ (qst préc.)}$$

Ainsi

$$T_n(x) - e^x \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On en déduit que $(T_n(x))$ converge et que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n(x) = e^x}$$

5. 5.a) On a

$$T_{2n}(x) + T_{2n}(-x) = \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{k!} (x^k + (-x)^k)$$

Or,

$$x^k + (-x)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \text{ est impair car } (-x)^k = -x^k \\ 2x^k & \text{si } k \text{ est pair car } (-x)^k = x^k \end{cases}$$

D'où, si on développe un peu l'expression afin de mieux comprendre :

$$T_{2n}(x) + T_{2n}(-x) = 2 \cdot \underbrace{\frac{x^0}{0!}}_{k=0} + \underbrace{0}_{k=1} + 2 \cdot \underbrace{\frac{x^2}{2!}}_{k=2} + \underbrace{0}_{k=3} + 2 \cdot \underbrace{\frac{x^4}{4!}}_{k=4} + \dots + 0 + 2 \cdot \underbrace{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{k=2n}$$

C'est-à-dire :

$$T_{2n}(x) + T_{2n}(-x) = 2 \cdot \left(\frac{x^0}{0!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$$

et donc, en écrivant ceci à l'aide d'indices :

$$T_{2n}(x) + T_{2n}(-x) = 2 \cdot \sum_{j=0}^n \frac{x^{2j}}{(2j)!} = 2 \cdot \sum_{j=0}^n \frac{(x^2)^j}{(2j)!}$$

D'après la question 2), on sait que

$$(2j)! \geq 2^j j! \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

et donc

$$\frac{1}{(2j)!} \leq \frac{1}{2^j j!}$$

D'où, par positivité de x^2 , pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\frac{(x^2)^j}{(2j)!} \leq \frac{(x^2)^j}{2^j j!}$$

et donc, par somme :

$$T_{2n}(x) + T_{2n}(-x) \leq 2 \cdot \sum_{j=0}^n \frac{(x^2)^j}{2^j j!}$$

Or

$$\frac{(x^2)^j}{2^j j!} = \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^j}{j!}$$

D'où le résultat demandé :

$$\boxed{T_{2n}(x) + T_{2n}(-x) \leq 2 \cdot \sum_{j=0}^n \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^j}{j!} = 2 \cdot T_n\left(\frac{x^2}{2}\right)}$$

5.b) Soit $x \geq 0$.

D'après la définition, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\ &= \frac{\left(T_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x)\right) + \left(T_n(-x) + \frac{(-x)^{n+1}}{n!} I_n(-x)\right)}{2} \\ &= \frac{(T_n(x) + T_n(-x)) + \left(\frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x) + \frac{(-x)^{n+1}}{n!} I_n(-x)\right)}{2} \\ &= \frac{2 \cdot T_n\left(\frac{x^2}{2}\right) + \overbrace{\left(\frac{x^{n+1}}{n!} I_n(x) + \frac{(-x)^{n+1}}{n!} I_n(-x)\right)}^{\alpha_n}}{2} \\ &\stackrel{\text{qst 4a)}}{\leq} \end{aligned} \tag{4}$$

Or :

- Les deux termes de α_n ont comme limite 0 d'après le résultat de la question 4)b).
- D'après 4)c), on sait que

$$T_n\left(\frac{x^2}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2}{2}} \quad \text{car } \frac{x^2}{2} \geq 0$$

- Par somme de termes qui convergent, la partie de droite de l'inégalité (4) converge vers $\frac{2e^{\frac{x^2}{2}} + 0}{2} = e^{\frac{x^2}{2}}$

- Le terme de gauche est indépendant de n , donc on peut passer à la limite dans l'inégalité en (préservant le sens des inégalités) et on obtient alors l'inégalité demandée :

$$\varphi(x) \leq e^{\frac{x^2}{2}}.$$

5.c) Si $x < 0$, comme la fonction φ est paire (cf qst 1), on obtient, d'après la question précédente, comme $-x \geq 0$:

$$\varphi(x) = \varphi(-x) \leq e^{\frac{(-x)^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

L'inégalité est donc bien vérifiée pour x négatif également.

6. X n'a que deux valeurs. C'est une variable finie. Par le le théorème de transfert, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = P(X = -1)e^{-t} + P(X = 1)e^t = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^t = \varphi(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}.$$

1. On propose ici la fonction suivante :

```
1 import random as rd
2
3 def Xn(n):
4     Urne=[0,1] # 1 boule noire (0) et une boule
5               blanche (1)
6     for _ in range(n): # on fait n tirages
7         Urne+=rd.randint(0,1) # choix aléatoire d
8                               'une blanche ou d'une noire et on la
9                               rajoute à l'urne
10    return(sum(Urne)) # on compte le nombre de
11                      blanches
```

Problème 2 :

2. a) Il y a deux boules dans l'urnes au départ. Le tirage de chacune d'entre elles est donc équiprobable. Elles sont de couleur différente, donc la probabilité de l'événement "tirer une boule blanche" est la même que "tirer une boule non blanche."
Autrement dit,

$$P(B_1) = \frac{1}{2}$$

2.b) Deux possibilités équiprobables s'offrent donc à nous après une expérience : soit on a tiré une boule blanche (B_1) et on a donc remis 2 boules blanches dans l'urne et dans ce cas $X_1 = 2$, soit on a tiré une boule noire ($\overline{B_1}$) et on a donc remis deux boules noires dans l'urne et dans ce cas $X_1 = 1$.

Ainsi,

$$P(X_1 = 2) = P(B_1) = \frac{1}{2}, \quad P(X_1 = 1) = P(\overline{B_1}) = \frac{1}{2}$$

X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 2 \rrbracket$.

3. 3.a) • Cas de $P(B_1 \cap B_2)$:

Cet événement est : on tire deux boules blanches successives. Ainsi,

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P_{B_1}(B_2) = \frac{1}{2}P_{B_1}(B_2)$$

Sachant que l'on a tiré une boule blanche à la première expérience (B_1), on a dans l'urne 3 boules de tirage équiprobable : 2 boules blanches et une boule noire. Ainsi,

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{2}{3}.$$

Ainsi,

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

• Cas de $P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2})$:

Cet événement est : on tire deux boules noires successives. Étant donné que le nombre de boules blanches et de noires dans l'urne initiale sont identiques et que les problèmes en "blanc" et "noir" sont symétriques, la probabilité demandée ici est la même que celle de $P(B_1 \cap B_2)$. Ainsi :

$$P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{3}$$

3.b) • Valeurs de X_2 :

Au minimum, on ne tire jamais aucune boule blanche. (C'est $\overline{B_1} \cap \overline{B_2}$.) Après deux expériences, il n'y a donc que la boule blanche de départ dans l'urne, donc 1 seule, i.e. $X_2 = 1$.

Au maximum, on tire une boule blanche à chaque fois. (C'est $B_1 \cap B_2$.) Ainsi, on rajoute 2 boules blanches au total. Il y a donc 3 boules blanches dans l'urne. Ainsi, l'ensemble des valeurs possibles de X_2 sont :

$$X_2(\Omega) = \llbracket 1; 3 \rrbracket.$$

- Loi :

D'après ce qui a été dit précédemment, on a :

$$P(X_2 = 1) = P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2}) = \frac{1}{3}.$$

De même

$$P(X_2 = 3) = P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3}$$

La valeur de $P(X_2 = 2)$ est donc déterminée automatiquement par

$$P(X_2 = 2) = 1 - P(X_2 = 1) - P(X_2 = 3) = \frac{1}{3}$$

Donc

$$X_2 \text{ suit une loi uniforme sur } \llbracket 1; 3 \rrbracket.$$

4. 4.a) Avec le même principe que pour la question 3), pour n tirages, on a au minimum $N_1 = 1$ boules blanches dans l'urne (si on ne tire jamais la blanche) et au maximum $N_1 + n = n + 1$ boules blanches (si on tire une boule blanche à chaque fois).

Ainsi

$$X_2(\Omega) = \llbracket 1, n + 1 \rrbracket$$

- 4.b) On se place dans l'hypothèse $X_n = i$, ce qui signifie qu'on a tiré i boules blanches au stade de l'expérience n . (On ne sait pas dans quel ordre mais peu importe.)

- Impossibilités :

Étant donné qu'on rajoute soit 0 soit 1 boule blanche, on peut d'ores et déjà dire que

$$P_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = 0 \quad \text{si } k < i \text{ ou } k > i + 1$$

- Une blanche de plus :

Si maintenant $k = i + 1$, l'événement " $X_{n+1} = k$ " signifie : "on a tiré une boule blanche". Ayant dans l'urne $X_n = i$ boules blanches et $N_1 + N_2 + n = 2 + n$ boules au total (car les n fois, on rajoute exactement une boule, quel qu'elle soit sa couleur), on obtient par équiprobabilité :

$$P_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = P_{\text{il y a } i \text{ blanches dans l'urne}}(B_{n+1}) = \frac{i}{2+n} = \frac{k-1}{n+2}$$

- Une noire de plus :

Si, pour finir $k = i$, c'est une boule noire qu'on a tiré. On en a $2 + n - i$ dans l'urne. Ainsi

$$P_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = P_{\text{il y a } i \text{ blanches dans l'urne}}(\overline{B_{n+1}}) = \frac{n+1-i}{2+n} = \frac{n+1-k}{2+n}$$

Ainsi

$$P_{X_n=i}(X_{n+1} = k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < i \text{ ou } k > i + 1 \\ \frac{i}{2+n} = \frac{k}{2+n} & \text{si } k = i + 1 \\ \frac{n+1-i}{2+n} = \frac{n+1-k}{2+n} & \text{si } k = i \end{cases}$$

- 4.c) Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: " X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; n + 1 \rrbracket$ ", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$."

- Initialisation :

D'après les questions précédentes, $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

- Hérédité :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

D'après les questions précédentes, on sait que

$$X_{n+1}(\Omega) = \llbracket 1; n + 2 \rrbracket$$

Pour tout $k \in X_{n+1}(\Omega)$, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ on a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = k) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i) P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = k) \\ &= 0 + P(X_n = k-1) P_{[X_n=k-1]}(X_{n+1} = k) \\ &\quad + P(X_n = k) P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = k) + 0 \\ &= \frac{1}{n+1} \frac{k}{n+2} + \frac{1}{n+1} \frac{n+1-k}{n+2} \quad (\text{HR. et qst préc.}) \\ &= \frac{1}{n+1} \underbrace{\left(\frac{k}{n+2} + \frac{n+1-k}{n+2} \right)}_{=1} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

- Conclusion :

Donc X_{n+1} suit bien une loi uniforme sur $\llbracket 1; n + 2 \rrbracket$.

Grâce au principe de récurrence on a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$X_n \text{ suit une loi uniforme sur } \llbracket 1; n + 1 \rrbracket.$$

5. Ayant $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$, on conjecture que $P(B_n) = \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite donc démontrer ceci par récurrence en posant $\mathcal{H}_n$ cette hypothèse.

• Initialisation :

C'est fait grâce à $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$.

• Hérédité :

Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie et montrons qu'il en va de même pour $\mathcal{H}_{n+1}$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $([X_n = i])_{i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ on a :

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} P(X_n = i) P_{[X_n=i]}(B_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{n+2} \\ &= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

La conclusion se fait donc par hérédité et on a alors

$$P(B_n) = \frac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

6. 6.a) D'après la formule de cours concernant la loi uniforme, on sait que

$$\mathbb{E}[X_n] = \frac{(n+1)+1}{2} = \frac{n+2}{2}$$

6.b) D'après le cours, on sait que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6.c) Comme X est une variable finie,

$$E(X_n^2) = \sum_{k=1}^{n+1} k^2 P(X = k) = \frac{1}{n+1} \times \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Donc, par la formule de Huygens-Koenig :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2 = \frac{(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{(n+2)^2}{4}$$

D'où après simplification :

$$V(X) = \frac{n+1}{12}.$$

7. • Cas de B_1 :

Par équiprobabilité sur les tirages des boules, sachant qu'il y a N_1 boules blanches dans l'urne initiale sur N boules au total, on a

$$P(B_1) = \frac{N_1}{N}.$$

- Cas de B_2 :

De même que pour le cas $N_1 = N_2 = 1$, d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(B_1, \overline{B_1})$:

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_1)P_{B_1}(B_2) + P(\overline{B_1})P_{\overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{N_1}{N} \times \frac{N_1+1}{N+1} + \frac{N_2}{N} \times \frac{N_1}{N+1} \\ &= \frac{N_1(N_1+1+N_2)}{N(N+1)} \end{aligned}$$

i.e., après simplification :

$$P(B_2) = \frac{N_1}{N}$$

On conjecture alors que la suite $P(B_n)$ est constante, c'est-à-dire :

$$P(B_n) = \frac{N_1}{N}$$

8. 8.a) La situation est identique au cas particulier précédent, (on rajoute 1 seule boule à chaque fois) mis à part qu'il y a N_1 boules blanches au départ au lieu de 2. Ainsi, on peut avoir comme valeurs

$$X_n(\Omega) = \llbracket N_1, N_1 + n \rrbracket$$

8.b) On rappelle que

$$\text{Supp}(X_n) = \llbracket N_1; N_1 + n \rrbracket.$$

Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X_n = k])_{k \in \llbracket N_1; N_1+n \rrbracket}$:

$$\begin{aligned}
P(B_n) &= \sum_{k=N_1}^{N_1+n} P(X_n = k) P_{[X_n=k]}(B_{n+1}) \\
&= \sum_{k=N_1}^{N_1+n} P(X_n = k) \times \frac{k}{N+n} \quad (\text{équiprobab.})
\end{aligned}$$

On obtient donc bien

$$P(B_n) = \frac{1}{N+n} \sum_{k=N_1}^{N_1+n} k P(X_n = k).$$

8.c) Pour tout $k \in \llbracket N_1; N_1 + n \rrbracket$, la famille d'événements

$$([X_{n-1} = k-1], [X_{n-1} = k])$$

forme un système complet d'événements de l'événement $(X_n = k)$. En effet, si on veut avoir n boules blanches à l'étape n , alors, à l'étape $n-1$, on a forcément soit k boules blanches, soit $k-1$ boules blanches.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$P(X_n = k) = \underbrace{P_{X_{n-1}=k-1}(X_n = k) P(X_{n-1} = k-1)}_{=0 \text{ si } k=N_1} + \underbrace{P_{X_{n-1}=k}(X_n = k) P(X_{n-1} = k)}_{=0 \text{ si } k=N_1+n}$$

En effet, si $k = N_1$, on est au nombre minimum de boules blanches. On ne peut donc pas non plus avoir $X_{n-1} = k-1$. De plus, après l'étape $n-1$, on ne peut avoir au maximum que $N_1 + n - 1$ boules blanches. Ainsi, l'événement $(X_{n-1} = N_1 + n)$ est impossible.

- Si $N_1 < k \leq N_1 + n$:

sachant $(X_{n-1} = k-1)$, on a $k-1$ boules blanches dans une urne de $N_1 + n - 1$ boules au total. Ainsi, par équiprobabilité :

$$P_{X_{n-1}=k-1}(X_n = k) = P_{X_{n-1}=k-1}(B_n) = \frac{k-1}{N_1 + n - 1}$$

- Si $N_1 \leq k < N_1 + n$:

sachant $(X_{n-1} = k)$, on a k boules blanches dans une urne de $N_1 + n - 1$ boules au total. Ainsi, par équiprobabilité :

$$P_{X_{n-1}=k}(X_n = k) = P_{X_{n-1}=k}(\overline{B_n}) = 1 - P_{X_{n-1}=k}(B_n) = 1 - \frac{k}{N_1 + n - 1}$$

D'où

$$P_{X_{n-1}=k}(X_n = k) P(X_{n-1} = k) = P(X_{n-1} = k) - \frac{k}{N_1 + n - 1} P(X_{n-1} = k)$$

D'où finalement :

$$P(X_n = k) = \begin{cases} \frac{1}{N+n-1} \left((k-1)P(X_{n-1} = k-1) - kP(X_{n-1} = k) \right) + P(X_{n-1} = k) & \text{si } k \in \llbracket N_1, N_1 + n \rrbracket \\ P(X_{n-1} = k) - \frac{k}{N_1+n-1} P(X_{n-1} = k) & \text{si } k = N_1 \\ \frac{k-1}{N+n-1} P(X_{n-1} = k) & \text{si } k = N_1 + n \end{cases}$$

Étant donné que $P(X_{n-1} = N_1 - 1) = 0$ et $P(X_{n-1} = N_1 + n)$, on peut également généraliser la formule sur $\llbracket N_1, N_1 + n \rrbracket$ à tout l'intervalle $\llbracket N_1, N_1 + n \rrbracket$ comme demandé dans l'énoncé et donc, $\forall k \in \llbracket N_1, N_1 + n \rrbracket$,

$$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k) + \frac{1}{N+n-1} \left((k-1)P(X_{n-1} = k-1) - kP(X_{n-1} = k) \right)$$

8.d) En réinjectant le résultat de la question précédente dans celle d'avant, on obtient immédiatement, en distribuant la somme :

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \frac{1}{N+n} \left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n} k \underbrace{P(X_{n-1} = k)}_{=0 \text{ si } k=N_1+n} + \frac{1}{N+n-1} \sum_{k=N_1}^{N_1+n} k(k-1) \underbrace{P(X_{n-1} = k-1)}_{=0 \text{ si } k=N_1} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{N+n-1} \sum_{k=N_1}^{N_1+n} k^2 \underbrace{P(X_{n-1} = k)}_{=0 \text{ si } k=N_1+n} \right) \\
&= \frac{1}{N+n} \left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k P(X_{n-1} = k) + \frac{1}{N+n-1} \sum_{k=N_1+1}^{N_1+n} k(k-1) P(X_{n-1} = k-1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{N+n-1} \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k^2 P(X_{n-1} = k) \right)
\end{aligned}$$

Un changement d'indice dans la deuxième somme en $i = k - 1$ donne :

$$\begin{aligned}
P(B_{n+1}) &= \frac{1}{N+n} \left(\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k) + \frac{1}{N+n-1} \sum_{i=N_1}^{N_1+n-1} \underbrace{(i+1)i}_{=i^2-i} P(X_{n-1} = i) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{N+n-1} \sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} k^2 P(X_{n-1} = k) \right) \\
&= \frac{1}{N+n} \left(\underbrace{\sum_{k=N_1}^{N_1+n-1} kP(X_{n-1} = k)}_{=(N+n)P(B_n)} + \frac{1}{N+n-1} \underbrace{\sum_{i=N_1}^{N_1+n-1} iP(X_{n-1} = i)}_{=(N+n)P(B_n)} \right) \\
&= \frac{1}{N+n} P(B_n) \left(1 + \frac{1}{N+n-1} \right) = \frac{1}{N+n} P(B_n) \left(\frac{N+n-1+1}{N+n-1} \right)
\end{aligned}$$

D'où, après simplification de la fraction :

$$\boxed{P(B_{n+1}) = P(B_n)}$$

9. D'après la question précédente, on sait que $(P(B_n))$ est une suite constante, dont on connaît la valeur "initiale" $P(B_2) = \frac{N_1}{N}$. Ainsi $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{P(B_n) = \frac{N_1}{N}}.$$

Étant donné que $\text{Supp}(X_n) = \llbracket N_1, N_1 + n \rrbracket$, on a par définition

$$\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=N_1}^{N_1+n} kP(X_n = k).$$

Or, d'après la question 8b) on peut alors dire que

$$\mathbb{E}[X_n] = (N+n)P(B_n)$$

D'où, d'après la valeur de $P(B_n)$:

$$\boxed{\mathbb{E}(X_n) = \frac{N_1(N+n)}{N}}.$$